УДК:620.1.08.620.22

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ ТЕКСТИЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ФИКСИРОВАННОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Шеромова И.А., Старкова Г.П.
Владивостокский государственный университет экономики и сервиса
Железняков А.С., Кудряшов О.И.
Новосибирский технологический институт МГУДТ

При выборе материалов для производства швейных изделий параметры подготовительных и термомеханических операций, в частности, режимы декатировочных процессов и влажно-тепловой обработки (ВТО) определяются в основном опытным путём. Поэтому в производственной практике необходимо проводить постоянную коррекцию технологических режимов и их адаптацию к требуемым условиям. Например, для обеспечения эксплуатационной формоустойчивости швейных изделий на стадии ВТО опытным путём определяют и корректируют продолжительность действия рабочих органов технологического оборудования в зависимости от вида обрабатываемых материалов и режимов процесса: температуры, давления, влаги и т.д. Такой подход к выбору режимов обработки обусловлен отсутствием эффективных методов и доступных технических средств.

Экспериментально установлено [1], что в процессе релаксации напряженного состояния легкодеформируемых материалов значимо изменяются их динамические характеристики, в частности, фазовые скорости и собственные частоты колебаний, которые могут быть информативными параметрами при разработке инструментальных методов исследования.

Из работ [2, 3] известно, что при колебаниях однородной пластины (рис.1) прогиб $y(x, t)$ является функцией линейной координаты (x) и времени (t). С некоторыми допущениями уравнение вынужденных колебаний полоски текстильного материала под действием внешней силы $f(x, t)$ запишем в виде:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} = f(x,\ t), \qquad (1)$$

где $f(x,\ t) = \dfrac{1}{\rho S} F(x,\ t)$; ρ – объёмная плотность; S - площадь поперечного сечения пластины; $F(x,t)$ – внешняя сила, изменяющаяся во времени и рассчитанная на единицу длины материала; $b=\sqrt{\dfrac{EJg}{p}}$; EJ – изгибная жёсткость материала в плоскости колебаний; p – погонный вес; g – гравитационная постоянная.

Рисунок 1- Схема к расчёту колебаний однородной пластины легкодеформируемого материала

Задачу рассмотрим, как начально-краевую на отрезке $x \in [0; l]$ с нулевыми начальными условиями

$$y(x,t)\Big|_{t=0} = 0; \quad \frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \qquad (2)$$

Граничные условия в случае жёсткого закрепления правого конца отрезка, а левый при этом условно свободен, зададим следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} & y(x,t)_{x=l} = \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0 \\ & \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\Big|_{x=0} = \frac{\partial^3 y(x,t)}{\partial x^3}\Big|_{x=0} = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (3)$$

Возмущающая сила $f(x,t)$ сосредоточена в точке x=0, т.е.

$$f(x,t) = \begin{cases} A\sin \omega t \ \ при & x = 0; \\ 0 \qquad\quad\ при & x \neq 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Согласно методу Фурье разделения переменных решение соответствующего однородного уравнения свободных колебаний при $f(x,t)$=0 получим в виде $y_n(x,t) = K\varphi_n(x)T_n(t)$ [4]. Выполняя стандартные действия метода разделения переменных и используя граничные условия (3) получим:

$$T_n(t) = \sin\left(\lambda_n^2 bt\right), \qquad (5)$$

$$\varphi_n(x) = C\left[(sh\lambda_n l + \sin\lambda_n l)(ch\lambda_n x + \cos\lambda_n x) - (ch\lambda_n l + \cos\lambda_n l)(sh\lambda_n x + \sin\lambda_n x)\right], \quad (6)$$

где λ_n положительные корни трансцендентного уравнения вида:

$$ch(\lambda_n l)\cdot\cos(\lambda_n l)=-1. \qquad (7)$$

Спектр собственных частоты колебаний (f_i), рассчитанных по выражению $f_i=\dfrac{\omega_i}{2\pi}=\dfrac{\lambda_i^2}{2\pi}\sqrt{\dfrac{E_i' Ig}{p}}$ [3], для образца костюмной ткани (арт. 2330) с начальными параметрами: $p=0{,}14$; E_0'=1,42МПа; длиной l=0.225 м, шириной $b=0{,}05м$ и толщиной $h=0{,}0013м$ для ненагруженных условий представлен в таблице.

Таблица

ε_i,%	E_i' МПА	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	…	f_n
0	1,42	0.33	2.09	5.85	11.46	18.97	28.33		
1	1,52	0.34	2.16	6.05	11.86	19.62	29.31		
2	1,63	0.36	2.24	6.26	12.28	20.32	30.35		
3	1,75	0.37	2.32	6.49	12.72	21.06	31.45		
4	1,95	0.39	2.45	6.85	13.43	22.23	33.19		
5	2,22	0.42	2.61	7.31	14.33	23.72	35.42		

Решение уравнения (1) будем базировать на введении функции влияния Грина [5], для определения которой рассмотрим методику её построения. В этом случае решение уравнения с заданными начальными и краевыми условиями (2 и 3) представим в виде ряда:

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\varphi_n(x), \qquad (8)$$

где $\varphi_n(x)$ - собственные функции.

Подставляя (8) в уравнение (1) имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty}T_n''(t)\varphi_n(x)+b^2\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\varphi_n^{(4)}(x)=f(x,t). \qquad (9)$$

Предполагаем, что функция $f(x,t)$ разлагается в ряд по собственным функциям $\varphi_n(x)$, получим:

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n f_n(t)\varphi_n(x), \qquad (10)$$

где $B_n f_n(t)$ в силу ортогональности $\varphi_n(x)$ на отрезке $[0;l]$ находятся следующим образом [4]:

$$B_n f_n(t) = \frac{\int_0^l f(\xi,t)\varphi_n(\xi)d\xi}{\|\varphi_n\|^2} \qquad (11)$$

где $\|\varphi_n\|^2$ - квадрат нормы собственной функции $\varphi_n(x)$ в пространстве функций, интегрируемых с квадратом.

Из (9) имеем:

$$\sum_{n=1`}^{\infty}\left(T_n''(t) + b^2\lambda_n^4 T(t)\right)\varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\varphi_n(x) f_n(t).$$

Отсюда

$$T_n''(t) + b^2\lambda_n^4 T_n(t) = B_n f_n(t). \qquad (12)$$

Решим это дифференциальное уравнение методом Лагранжа вариации произвольных постоянных**,** т.е. ищем общее решение в виде:

$$T(t) = u(t)\cos(b\lambda_n^2 t) + v(t)\sin(b\lambda_n^2 t) \qquad (13)$$

Составляем систему уравнений для $\dot{u}$ и $\dot{v}$:

$$\begin{cases} \dot{u}\cos(b\lambda_n^2 t) + \dot{v}\sin(b\lambda_n^2 t) = 0 \\ -\dot{u}b\lambda_n^2\sin(b\lambda^2 t) + \dot{v}b\lambda_n^2\cos(b\lambda_n^2 t) = B_n f_n(t) \end{cases}. \qquad (14)$$

Тогда

$$T_n(t) = \frac{1}{b\lambda_n^2}d\tau = \frac{1}{b\lambda_n^2}\int_0^t B_n f_n(\tau)\left(\sin(b\lambda_n^2 t)\cos(b\lambda_n^2\tau) - \cos(b\lambda_n^2 t)\sin(b\lambda_n^2\tau)\right)d\tau$$

$$= \frac{1}{b\lambda_n^2}\int_0^t B_n f_n(\tau)\sin\left(b\lambda_n^2(t-\tau)\right)d\tau. \qquad (15)$$

Следовательно, согласно (8 и 15) получим:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b\lambda_n^2}\int_0^t B_n f_n(\tau)\sin\left(b\lambda_n^2(t-\tau)\right)\varphi_n(x)d\tau. \qquad (16)$$

Подставляя (11) в (16), получим:

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b\lambda_n^2}\int_0^t\frac{\int_0^l f(\xi,\tau)\varphi_n(\xi)d\xi}{\|\varphi_n\|^2}\sin\left(b\lambda_n^2(t-\tau)\right)\varphi_n(x)d\tau.$$

Меняя суммирование с интегрированием местами, имеем:

$$y(x,t)=\int_o^t\int_o^l f(\xi,\tau)\cdot\frac{1}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n{}^2\|\varphi_n\|^2}\sin\left(\lambda_n^2 b(t-\tau)\right)d\xi d\tau. \qquad (17)$$

или, если обозначить

$$G(x,\xi,t)=\frac{1}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n^2\|\varphi_n\|^2}\sin(\lambda_n^2 bt), \qquad (18)$$

то формула (17) примет вид:

$$y(x,t)=\int_0^t\int_0^l G(x,\xi,t-\tau)\,f(\xi,\tau)d\xi d\tau, \qquad (19)$$

где $G(x,\xi,t-\tau)$ и есть функция Грина.

Рассматривая предлагаемую методику построения модели прогиба однородной пластины при заданных начальных условиях, необходимо также определить квадрат нормы собственной функции.

Воспользуемся известной формулой А.Н. Крылова [6].

$$\|\varphi_n\|^2=\int_0^l\varphi_n{}^2(x)dx=\frac{l}{4}\varphi_n{}^2(l)+\frac{l}{4\lambda_n{}^4}(\varphi_n{}''(l))^2-\frac{l}{2\lambda_n{}^4}\varphi_n'(l)\cdot\varphi_n'''(l) \quad (20)$$

и вычисляя значения функции $\varphi_n(x)$ и её производных при $x=l$, получим:

$$\|\varphi_n\|^2=lC^2\left(ch^2(\lambda_n l)\cdot\sin^2(\lambda_n l)+sh^2(\lambda_n l)\cdot\cos^2(\lambda_n l)+2sh(\lambda_n l)\cdot\sin(\lambda_n l)\right) \quad (21)$$

Рассмотрим возмущающую силу (4), как предельный случай той ситуации, когда *f(x,t)* действует лишь на промежутке $(0;\varepsilon)$, а вне этого промежутка действие силы равно нулю.

Тогда $\int_0^{\varepsilon} f(\xi,\tau)d\xi\to f(0,\tau)$ при $\varepsilon\to 0$.

Согласно интегральной теореме о среднем

$$\int_0^l f(\xi,\tau)\varphi_n(\xi)d\xi = \int_0^\varepsilon f(\xi,\tau)\varphi_n(\xi)d\xi = \varphi_n(\chi)\int_0^\varepsilon f(\xi,\tau)d\xi \qquad (22)$$

$$(0 < \chi < \varepsilon).$$

При $\varepsilon \to 0$

$$\varphi_n(\chi)\int_0^\varepsilon f(\xi,\tau)d\xi \to \varphi_n(0)f(0,\tau) \qquad (23)$$

Вычислим $\varphi_n(0)$

$$\varphi_n(0) = 2C(sh\lambda_n l + \sin\lambda_n l). \qquad (24)$$

Тогда из (17 и 22) получим:

$$y(x,t) = \frac{A}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(0)}{\lambda_n{}^2\|\varphi_n\|^2}\int_0^t \sin(\omega\tau)\cdot\sin\left(\lambda_n{}^2 b(t-\tau)\right)d\tau. \qquad (25)$$

Отдельно вычислим определённый интеграл по τ в формуле (25)

$$\int_0^t \sin\omega\tau\cdot\sin\left(\lambda_n{}^2 b(t-\tau)\right)d\tau = \frac{\lambda_n{}^2 b}{\lambda_n{}^4 b^2-\omega^2}\sin\omega t - \frac{\omega}{\lambda_n{}^4 b^2-\omega^2}\sin\lambda_n{}^2 bt. \qquad (26)$$

Подставляя полученный результат интегрирования в (25), окончательно получим математическую модель прогиба однородной пластины легкодеформируемого композита

$$y(x,t) = A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(0)\cdot\sin\omega t\cdot\varphi_n(x)}{\|\varphi_n\|^2(\lambda_n^4 b^2-\omega^2)} - \frac{A\omega}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(0)\sin\lambda_n^2 bt\cdot\varphi_n(x)}{\lambda_n^2\|\varphi_n\|^2(\lambda_n^4 b^2-\omega^2)}. \qquad (27)$$

В этой итоговой формуле $\varphi_n(0)$ вычисляется по формуле (24), $\|\varphi_n\|^2$ - по формуле (21), $\varphi_n(x)$ - по формуле (6). Анализируя результаты компьютерного моделирования математической модели (27) прогиба однородного образца материала при действии фиксированной частоты вынужденных колебаний, видим (рис.2), что изменение модуля упругости (напряжения) материала, ведёт к трансформации параметров собственных колебаний**,** что соответствует представлениям о физике процесса.

Кроме того, результаты исследования показывают, что зависимость параметров колебаний от НДС материала (в диапазоне между двумя их главными частотами) представляет собой монотонную нелинейную функцию (рис. 3).

Рисунок 2 – Параметрические колебания легкодеформируемой пластины из текстильного материала (костюмная ткань, арт. 2330; $A = 0{,}01$м, $f_0 = 18{,}967$); $y_0(x,t)$ при $E_0 = 1{,}42$ МПа, $y_1(x,t)$ при $E_1 = 1{,}52$ МПа; $y_2(x,t)$ при $E_2 = 1{,}63$ МПа; $y_3(x,t)$ при $E_3 = 1{,}75$ МПа; $y_4(x,t)$ при $E_5 = 1{,}95$ МПа; $y_5(x,t)$ при $E_5 = 2{,}22$ МПа.

Из общего анализа модели прогиба и её графического отображения следует, что при релаксации напряжения легкодеформируемых материалов и $\varepsilon = const$ изменяются их динамические свойства и соответственно параметры вынужденных колебаний.

Рисунок 3 – Зависимость амплитуды вынужденных параметрических колебаний (для $x = 0.116$м) от напряженно-деформированного состояния материала

Изменяющиеся характеристики вынужденных колебаний могут являться информативными параметрами процесса релаксации напряжения при фиксированной деформации, что может быть базовой основой для разработки методов и средств исследования релаксации НДС легкодеформируемых композитов при фиксированной деформации.

Список использованных источников

1. Беличенко К.К., Мишаков В.Ю., Железняков А.С. Экспериментальное исследование НДС мягких композитов посредством механических колебаний //Материаловедение.№10.- 2004.- С.19-22.

2. Ф. Крауфорд. Берклеевский курс физики. Волны. Том 3.- М.: Наука.-1984.-511с.

3. Афанасьев А.М., Марьин В.А. Лабораторный практикум по сопротивлению материалов.- М.: Наука.- 1975.-287с.

4. Смирнов В.И.Курс высшей математики, т.II . М.: ГИФМЛ, 1962.- 628с.

5. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Изд-во физико-математической литературы, 2001.- 566с.

6. Крылов А.Н. Собрание трудов: Математика, ч.2.-М.: Изд. АН СССР, 1949.-482с.